Torseurs -
un cours minimal

Y. Remion

LERI, IUT Léonard de Vinci de Reims,
rue des crayères, B.P. 1035, 51687 Reims cedex 2

yannick.remion@univ-reims.fr

Résumé

Ce cours minimal sur les torseurs introduit les concepts et propriétés de ces outils mathématiques intimement liés à la mécanique du solide.

En effet tant les champs de vitesses, de quantités de mouvement et d'accélérations que les efforts s'expriment par des torseurs. Les 2 équations traditionnelles (principe fondamental de la dynamique gérant la position du centre de masse du solide, théorème du moment cinétique gérant son orientation) sont alors regroupées en une équation en torseur.

Toute personne concernée par l'animation dynamique de solides conçoit alors l'utilité de connaître les règles de manipulation de ces outils.

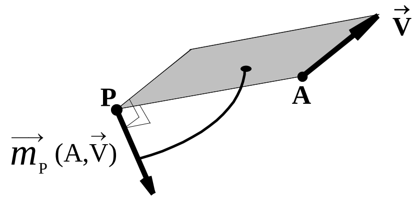
Après avoir introduit les outils sous-jacent (pointeurs, vecteurs glissant et leurs moments) on définit le concept de torseur. Vient ensuite l'étude de ses propriétés utiles en mécanique du solide (déplacement, invariant scalaire, somme, comoment, axe central, équiprojectivité des moments et réciproque). L'exposé se termine par une classification des torseurs en 3 groupes : les glisseurs, les couples, les sommes couple+glisseur.

Mots-Clés : Torseur, Mécanique du solide.

1. Bases

1.1. Pointeur / Vecteur Glissant et moments

Un **Pointeur** est un vecteur $\vec{V}$ lié à un point A. on le note $(A, \vec{V})$.



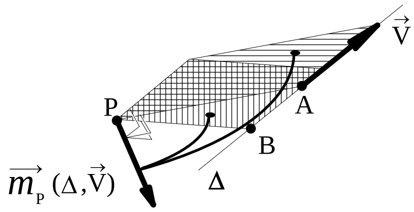
On appelle **Moment en P du pointeur** $(A, \vec{V})$ le vecteur $\vec{m}_P(A, \vec{V}) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V}$

Un **Vecteur Glissant** est un vecteur $\vec{V}$ lié à une droite $\Delta // \vec{V}$. on le note $(\Delta, \vec{V})$

pour une droite $\Delta // \vec{V}$ fixée, on a :

$$\forall A, B \in \Delta \quad \vec{m}_P\left(A, \vec{V}\right) = \vec{P}A \wedge \vec{V} = \left(\vec{P}B + \lambda \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = \vec{P}B \wedge \vec{V} = \vec{m}_P\left(B, \vec{V}\right)$$

On appelle alors **Moment au point P du vecteur glissant** $\left(\Delta, \vec{V}\right)$ ce vecteur $\vec{m}_P\left(\Delta, \vec{V}\right) = \vec{P}A \wedge \vec{V}$ pour $A \in \Delta$ qcq

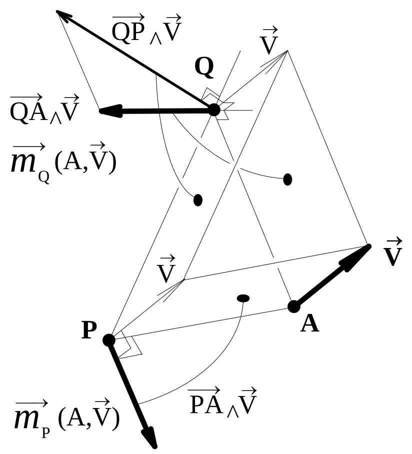


1.2. Relation fondamentale des moments

$$\forall P, Q \quad \vec{m}_Q\left(A, \vec{V}\right) = \vec{Q}A \wedge \vec{V} = \vec{Q}P \wedge \vec{V} + \vec{P}A \wedge \vec{V}$$

soit :

$$\forall P, Q \quad \vec{m}_Q\left(A, \vec{V}\right) = \vec{m}_P\left(A, \vec{V}\right) + \vec{Q}P \wedge \vec{V}$$



1.3. Torseurs

Etant donné un champ de pointeurs $C = \left\{ \left(A_i , \vec{V}_i \right) \ i = 1..n \right\}$

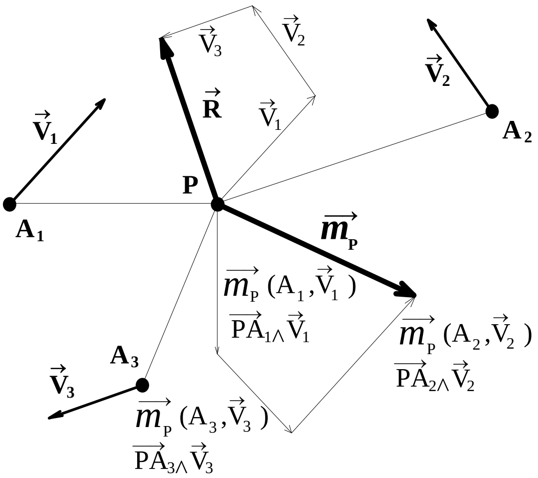
ou un champ de vecteurs glissants $C = \left\{ \left(\left(A_i , \vec{V}_i \right), \vec{V}_i \right) \ i = 1..n \right\}$,

on définit le **Torseur associé au champ C au point P** comme le couple d'un vecteur et d'un vecteur lié à P :

$$\{C\}_P = \left\{ \begin{aligned} \vec{\mathbf{R}} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \\ \vec{m}_P &= \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_P\left(A_i , \vec{V}_i\right) \end{aligned} \right\}_P = \left\{ \begin{aligned} \vec{\mathbf{R}} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \\ \vec{m}_P &= \sum_{i=1}^{n} \vec{PA}_i \wedge \vec{V}_i \end{aligned} \right\}_P$$

avec $\vec{\mathbf{R}}$ **Résultante**, $\vec{m}_P$ **Moment résultant en P** — **Eléments de réduction en P**

On appelle $\vec{\mathbf{R}}$ la **Résultante** du torseur, $\overrightarrow{m_P}$ le **Moment résultant en P** et les 2 **Eléments de réduction en P**



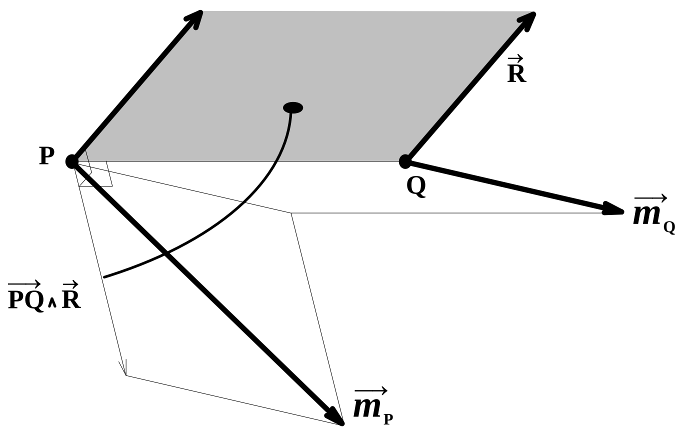
2. Propriétés

2.1. Déplacement

$$\forall P, Q \quad \overrightarrow{m_P} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA_i} \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{QA_i} \wedge \vec{V}_i = \overrightarrow{PQ} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i + \overrightarrow{m_Q}$$

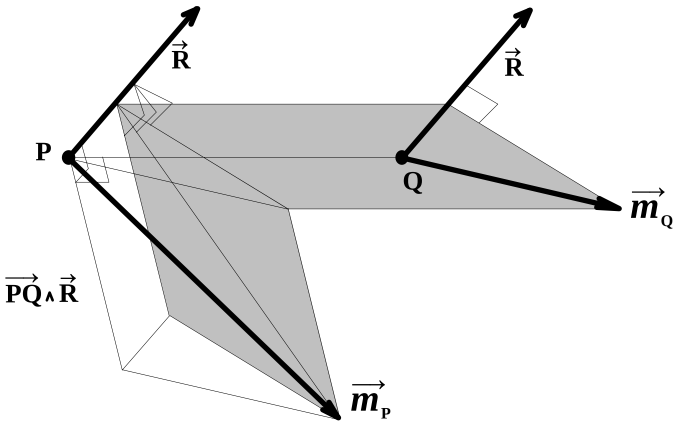
soit :

$$\boxed{\forall P, Q \quad \overrightarrow{m_P} = \overrightarrow{m_Q} + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{m_Q} + \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{QP}}$$



2.2. Invariant Scalaire

Le produit scalaire $J = \overrightarrow{m_P} \cdot \vec{\mathbf{R}}$ est indépendant du point P, on l'appelle **Invariant Scalaire du Torseur**.



démonstration : $\forall P, Q \quad J = \overrightarrow{m_P} \cdot \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{m_Q} \cdot \vec{\mathbf{R}} + \left(\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\mathbf{R}}\right) \cdot \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{m_Q} \cdot \vec{\mathbf{R}}$

Corollaire

La projection de $\overrightarrow{m_P}$ sur $\vec{\mathbf{R}}$ est donc indépendante du point P.

démonstration : Immédiat d'après ci-dessus

2.3. Somme

La **Somme de 2 torseurs** revient à la réunion de leurs 2 champs de vecteurs

elle s'obtient par sommes des éléments de réduction au même point P.

$$\forall P \quad \left\{C_1\right\}_P + \left\{C_2\right\}_P = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R}_1} \\ \overrightarrow{m_{1P}} \end{matrix}\right\}_P + \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \\ \overrightarrow{m_{2P}} \end{matrix}\right\}_P = \left\{\begin{matrix} \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{R}_1} + \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \\ \overrightarrow{m_P} = \overrightarrow{m_{1P}} + \overrightarrow{m_{2P}} \end{matrix}\right\}_P$$

démonstration :

$$\forall P \quad \left\{C_1\right\}_P + \left\{C_2\right\}_P = \left\{C_1 \cup C_2\right\}_P = \left\{\begin{matrix} \vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n_1} \overrightarrow{V_{1i}} + \sum_{i=1}^{n_2} \overrightarrow{V_{2i}} \\ \overrightarrow{m_P} = \sum_{i=1}^{n_1} \overrightarrow{m_P}(A_{1i}, \overrightarrow{V_{1i}}) + \sum_{i=1}^{n_2} \overrightarrow{m_P}(A_{2i}, \overrightarrow{V_{2i}}) \end{matrix}\right\}_P = \left\{\begin{matrix} \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{R}_1} + \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \\ \overrightarrow{m_P} = \overrightarrow{m_{1P}} + \overrightarrow{m_{2P}} \end{matrix}\right\}_P$$

2.4. Comoment

Le **Comoment de 2 torseurs** est défini par le calcul suivant.

$$P_P = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R}_1} \\ \overrightarrow{m_{1P}} \end{matrix}\right\}_P \cdot \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \\ \overrightarrow{m_{2P}} \end{matrix}\right\}_P = \overrightarrow{\mathbf{R}_1} \cdot \overrightarrow{m_{2P}} + \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \cdot \overrightarrow{m_{1P}}$$

ce calcul est indépendant de P !

démonstration :

$$P_Q = \overrightarrow{\mathbf{R}_1} \cdot \overrightarrow{m_{2Q}} + \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \cdot \overrightarrow{m_{1Q}} = \overrightarrow{\mathbf{R}_1} \cdot \left(\overrightarrow{m_{2P}} + \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}_2}\right) + \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \cdot \left(\overrightarrow{m_{1P}} + \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}_1}\right)$$

$$= P_P + \overrightarrow{\mathbf{R}_1} \cdot \left(\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}_2}\right) + \overrightarrow{\mathbf{R}_2} \cdot \left(\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}_1}\right) = P_P + \left(\overrightarrow{\mathbf{R}_1}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{\mathbf{R}_2}\right) + \left(\overrightarrow{\mathbf{R}_2}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{\mathbf{R}_1}\right) = P_P$$

2.5. Axe central

Théorème et Définition

si $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{0}$ le lieu de tous les points Q tels que $\vec{\mathbf{R}} // \overrightarrow{m_Q}$ existe et est une droite $\Delta // \vec{\mathbf{R}}$ appelée **Axe Central du Torseur**.

$$\Delta = \left(Q_0, \vec{\mathbf{R}}\right)$$

démonstration :

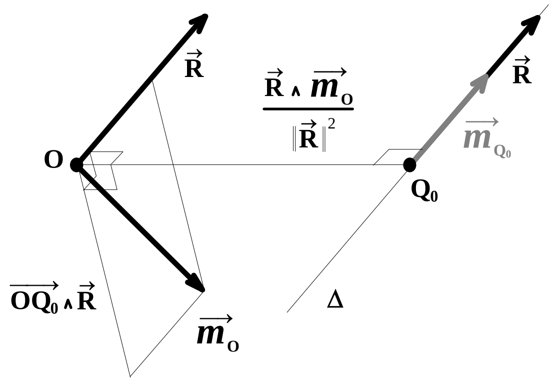
$$\vec{\mathbf{R}} // \overrightarrow{m_Q} \iff \vec{0} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_Q} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O} + \vec{\mathbf{R}} \wedge \left(\overrightarrow{QO} \wedge \vec{\mathbf{R}}\right)$$

$$\iff \vec{0} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O} + \|\vec{\mathbf{R}}\|^2 \cdot \overrightarrow{QO} - \left(\vec{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{QO}\right) \cdot \vec{\mathbf{R}}$$

$$\iff \|\vec{\mathbf{R}}\|^2 \cdot \overrightarrow{OQ} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O} + \left(\vec{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{OQ}\right) \cdot \vec{\mathbf{R}}$$

$$\iff \overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} + \frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{OQ}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}}$$

$$\iff \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ_0} + \lambda \cdot \vec{\mathbf{R}}$$



ou : • si un tel point Q_0 existe, tous les autres vérifient $\vec{0} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_Q} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_{Q_0}} + \vec{\mathbf{R}} \wedge \left(\overrightarrow{QQ_0} \wedge \vec{\mathbf{R}}\right)$ soit :

$$\vec{0} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \left(\overrightarrow{QQ_0} \wedge \vec{\mathbf{R}}\right) = \|\vec{\mathbf{R}}\|^2 \cdot \overrightarrow{QQ_0} - \left(\vec{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{QQ_0}\right) \cdot \vec{\mathbf{R}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QQ_0} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{QQ_0}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{R}} \quad \Rightarrow \quad Q \in \Delta = \left(Q_0, \vec{\mathbf{R}}\right)$$

• calcul de Q_0 dans le plan $\Pi = \left(O, \vec{\mathbf{R}}\right)$ soit tel que : $0 = \vec{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{OQ_0}$

$$\vec{\mathbf{R}} // \overrightarrow{m_{Q_0}} \Rightarrow \vec{0} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_{Q_0}} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O} - \vec{\mathbf{R}} \wedge \left(\overrightarrow{OQ_0} \wedge \vec{\mathbf{R}}\right) = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O} - \|\vec{\mathbf{R}}\|^2 \cdot \overrightarrow{OQ_0}$$

on a donc : $\overrightarrow{OQ_0} = \dfrac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2}$ $\qquad \overrightarrow{OQ} = \dfrac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} + \lambda \cdot \vec{\mathbf{R}}$

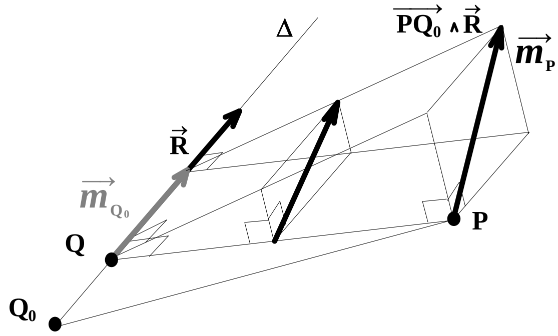
Propriétés

Le moment est constant sur l'axe central, et sa norme y est minimum, plus précisément il vient :

$\forall Q \in \Delta \quad \overrightarrow{m_Q} = \dfrac{J}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}}$ et $\left\|\overrightarrow{m_Q}\right\| = \dfrac{J}{\|\vec{\mathbf{R}}\|}$ est le moment minimum du torseur

démonstration

$$\forall Q \in \Delta \quad \overrightarrow{m_Q} = \overrightarrow{m_O} + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{m_O} + \vec{\mathbf{R}} \wedge \left(\frac{\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{m_O}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} + \lambda \cdot \vec{\mathbf{R}}\right) = \overrightarrow{m_O} + \frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \overrightarrow{m_O}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}} - \frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \overrightarrow{m_O} = \overrightarrow{m_O} + \frac{J}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}} - \overrightarrow{m_O} = \frac{J}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}}$$

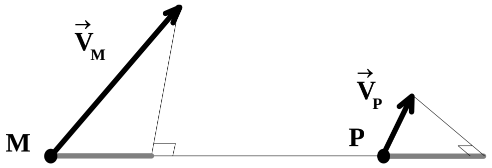


$$\forall P \notin \Delta \quad \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{m_P} = \overrightarrow{m_{Q_0}} + \overrightarrow{PQ_0} \wedge \vec{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{m_{Q_0}} // \vec{\mathbf{R}}, \ \overrightarrow{PQ_0} \wedge \vec{\mathbf{R}} \perp \vec{\mathbf{R}} \text{ et } \overrightarrow{PQ_0} \wedge \vec{\mathbf{R}} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{m_P}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{m_{Q_0}}\right\|^2 + \left(\overrightarrow{PQ_0} \wedge \vec{\mathbf{R}}\right)^2 \Rightarrow \left\|\overrightarrow{m_P}\right\| > \left\|\overrightarrow{m_{Q_0}}\right\|$$

2.6. Equiprojectivité

Un champ de vecteurs liés $\left\{ \left(P, \overrightarrow{V_P}\right) \quad P \in E \subset \mathbb{R}^3 \right\}$ est dit **équiprojectif** ssi il vérifie :

$$\forall M, P \in E \qquad \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{V_P}$$



cela revient à dire que $\forall M, P \in E$ les projections de $\overrightarrow{V_M}$ et $\overrightarrow{V_P}$ sur la droite (MP) sont égales.

Théorème

Le champ $\left\{ \left(P, \overrightarrow{m_P}\right) \quad P \in \mathbb{R}^3 \right\}$ des moments d'un torseur est **équiprojectif** : $\quad \forall M, P \quad \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{m_M} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{m_P}$

démonstration : $\quad \forall M, P \quad \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{m_M} - \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{m_P} = \overrightarrow{MP} \cdot \left(\overrightarrow{m_M} - \overrightarrow{m_P}\right) = \overrightarrow{MP} \cdot \left(\overrightarrow{MP} \wedge \vec{\mathbf{R}}\right) = 0$

Théorème réciproque Tout champ $V \left\{ \left(P, \overrightarrow{V_P}\right) \quad P \in R^3 \right\}$ équiprojectif est le champ des moments d'un torseur.

Lemme tout champ V équiprojectif vérifie $\quad \forall O, M, P \quad \left(\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_O}\right) \cdot \overrightarrow{OP} = -\left(\overrightarrow{V_P} - \overrightarrow{V_O}\right) \cdot \overrightarrow{OM}$

démonstration du lemme : $\quad \forall O, M, P \quad 0 = \left(\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_P}\right) \cdot \overrightarrow{MP} = \left(\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{V_O} - \overrightarrow{V_P}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP}\right)$

soit $\quad 0 = \left(\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_O}\right) \cdot \overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{V_O} - \overrightarrow{V_P}\right) \cdot \overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_O}\right) \cdot \overrightarrow{OP} + \left(\overrightarrow{V_O} - \overrightarrow{V_P}\right) \cdot \overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_O}\right) \cdot \overrightarrow{OP} + \left(\overrightarrow{V_P} - \overrightarrow{V_O}\right) \cdot \overrightarrow{OM}$

démonstration du théorème :

Soit un repère orthonormé $\left(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right)$ et 3 points (X,Y,Z) tels que $\overrightarrow{OX} = \vec{X}$, $\overrightarrow{OY} = \vec{Y}$, $\overrightarrow{OZ} = \vec{Z}$. Ce repère fixé, posons par ailleurs $\forall P \quad \vec{A}_P = \vec{V}_P - \vec{V}_O$. Avec cette notation le lemme devient $\forall M, P \quad \vec{A}_M \cdot \overrightarrow{OP} = -\vec{A}_P \cdot \overrightarrow{OM}$

Cherchons maintenant l'expression de $\vec{A}_P$ dans la base $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right)$

$$\vec{A}_P = \begin{bmatrix} \vec{A}_P \cdot \overrightarrow{OX} \\ \vec{A}_P \cdot \overrightarrow{OY} \\ \vec{A}_P \cdot \overrightarrow{OZ} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{A}_X \cdot \overrightarrow{OP} \\ \vec{A}_Y \cdot \overrightarrow{OP} \\ \vec{A}_Z \cdot \overrightarrow{OP} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{A}_X \\ \vec{A}_Y \\ \vec{A}_Z \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{OP} \qquad \text{posons maintenant} \qquad \begin{cases} a_{xy} = \vec{A}_X \cdot \vec{Y} = \vec{A}_X \cdot \overrightarrow{OY} = -\vec{A}_Y \cdot \overrightarrow{OX} = -\vec{A}_Y \cdot \vec{X} \\ a_{zx} = \vec{A}_Z \cdot \vec{X} = \vec{A}_Z \cdot \overrightarrow{OX} = -\vec{A}_X \cdot \overrightarrow{OZ} = -\vec{A}_X \cdot \vec{Z} \\ a_{yz} = \vec{A}_Y \cdot \vec{Z} = \vec{A}_Y \cdot \overrightarrow{OZ} = -\vec{A}_Z \cdot \overrightarrow{OY} = -\vec{A}_Z \cdot \vec{Y} \end{cases}$$

il vient $$\vec{A}_P = \begin{bmatrix} 0 & -a_{xy} & a_{zx} \\ a_{xy} & 0 & -a_{yz} \\ -a_{zx} & a_{yz} & 0 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a_{yz} \\ a_{zx} \\ a_{xy} \end{bmatrix} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PO} \wedge \begin{bmatrix} a_{yz} \\ a_{zx} \\ a_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{soit} \quad \forall P \quad \vec{V}_P = \vec{V}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\mathbf{R}} \qquad \text{avec } \vec{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} a_{yz} \\ a_{zx} \\ a_{xy} \end{bmatrix}$$

ainsi V est bien le champ des moments du torseur dont les éléments de réduction en O sont :

résultante: $$\vec{\mathbf{R}}\Big|_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} = \begin{bmatrix} a_{yz} = \left(\vec{V}_Y - \vec{V}_O\right) \cdot \vec{Z} = -\left(\vec{V}_Z - \vec{V}_O\right) \cdot \vec{Y} \\ a_{zx} = \left(\vec{V}_Z - \vec{V}_O\right) \cdot \vec{X} = -\left(\vec{V}_X - \vec{V}_O\right) \cdot \vec{Z} \\ a_{xy} = \left(\vec{V}_X - \vec{V}_O\right) \cdot \vec{Y} = -\left(\vec{V}_Y - \vec{V}_O\right) \cdot \vec{X} \end{bmatrix}$$ et **moment en O** : $\vec{V}_O$

3. Classification et Décomposition

Torseurs à Invariant Scalaire nul

- $\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$, $\overrightarrow{m_O} = \vec{0}$: le moment est nul en tout point c'est le **Torseur Nul**
- $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{0}$: $\boldsymbol{J}$ étant nul, $\forall Q \in \Delta$ $\overrightarrow{m_Q} = \vec{0}$. le Torseur est un vecteur glissant ou **Glisseur** $\vec{\mathbf{R}}$ sur son axe Δ
- $\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$, $\overrightarrow{m_O} \neq \vec{0}$: $\vec{\mathbf{R}}$ étant nul, $\forall P$ $\overrightarrow{m_P} = \overrightarrow{m_O}$ le Torseur est un **Couple**.

Torseurs Généraux (à Invariant Scalaire non nul)

Décomposition comme somme d'un Glisseur sur son axe et d'un couple de moment parallèle à son axe :

$$\forall Q \in \Delta \qquad \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{R}} \\ \overrightarrow{m_Q} = \dfrac{\boldsymbol{J}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}} \end{Bmatrix}_Q = \begin{Bmatrix} \vec{\mathbf{R}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_Q + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dfrac{\boldsymbol{J}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|^2} \cdot \vec{\mathbf{R}} \end{Bmatrix}_Q$$

L'auteur

Yannick Remion, né en 1962, Polytechnicien, est docteur ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris, spécialité Automatique et Traitement du Signal, enseignant à l'IUT Léonard de Vinci de Reims, chercheur du LERI. Ses recherches concernent l'Imagerie Numérique et l'Intelligence Artificielle.